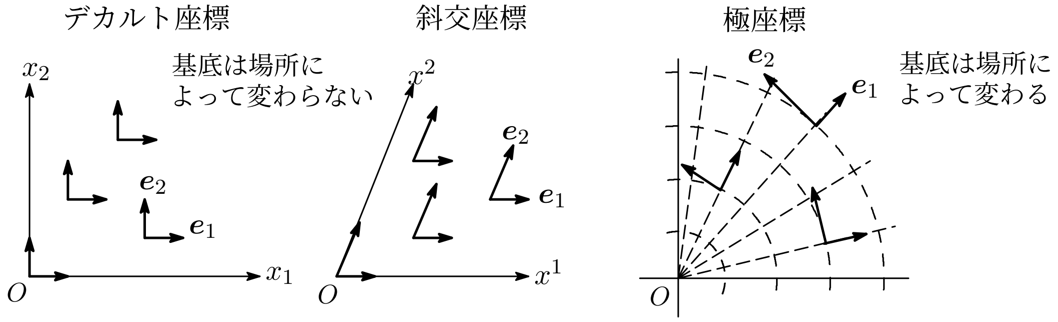
■ Appendix

共変微分の補足に加え，測地線のお話，曲率テンソルの物理的意味などを付録として追加しました．付録を纏めるにあたり須藤靖・著「一般相対論入門」（日本評論社）などを参考にしました．

A.1　共変微分について

- K氏 :§6.4 で共変微分の話をしたけど，曲線座標に慣れ親しんでいく上で大切なポイントになるのでもう一度取りあげることにした． さて，下図に見るようにデカルト座標（直交直線座標）や斜交座標における基底は座標位置によって変化しなかったけど，曲線座標における自然基底は位置によって変化した．このことが曲線座標の曲線座標たる所以だが．

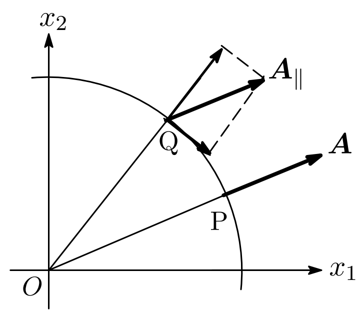


- エミリー：つまり，デカルト座標や斜交座標などの直線座標系では計量テンソルは定数になるけど，座標軸が曲がっているような曲線座標系では計量テンソルは位置によって異なる値をとる，つまり曲線座標の関数になるということね．

- K氏：そういうことだね．

A.1.1　ベクトルの平行移動

- K氏：ベクトルの平行移動を考えてみよう．基底はベクトルの骨格をなすもので，直線座標系の場合，基底の変化はないので平行移動前後でベクトルの成分は変わらない．しかし，曲線座標系の場合はどうだろうか．一般的なな議論は後でやるとしてまず直感的に把握しやすい 2 次元極座標を例にとりあげよう．



P 点でのベクトルを $\boldsymbol{A}$ とし，点 Q でそれと平行に引いたベクトルを $\boldsymbol{A}_\parallel$ としよう．ここで注目

して欲しいのは，ベクトル自身は同じだけど曲線座標の自然基底が場所によって変わるので $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ の成分は一致しないという点だ．つまり成分にズレが生じるということだね．このズレの大きさは dr や $d\theta$ の大小に比例するし，$\boldsymbol{A}$ の大きさにも比例する．つまり比例する項をあげると

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix} \longrightarrow A_r dr,\ A_r d\theta,\ A_\theta dr,\ A_\theta d\theta \tag{A.1}$$

の 4 個．したがって，$\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{A}$ の成分のズレは ${\Gamma^j}_{rk}$ を比例係数として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\parallel r} - \boldsymbol{A}_r &= {\Gamma^r}_{rr} A_r dr + {\Gamma^r}_{r\theta} A_r d\theta + {\Gamma^\theta}_{rr} A_\theta dr + {\Gamma^\theta}_{r\theta} A_\theta d\theta \\ \boldsymbol{A}_{\parallel \theta} - \boldsymbol{A}_\theta &= {\Gamma^r}_{\theta r} A_r dr + {\Gamma^r}_{\theta\theta} A_r d\theta + {\Gamma^\theta}_{\theta r} A_\theta dr + {\Gamma^\theta}_{\theta\theta} A_\theta d\theta \end{aligned} \tag{A.2}$$

と表せる．(A.2) をスマートに書くと

$$\boldsymbol{A}_{\parallel i} - \boldsymbol{A}_i = {\Gamma^j}_{ik} A_j du^k \tag{A.3}$$

となる．${\Gamma^j}_{rk}$ は今まで何度もでてきたクリストッフェル記号だね．

- エミリー：デカルト座標や斜交座標では ${\Gamma^j}_{rk} = 0$ になるので，$\boldsymbol{A}_{\parallel i} = \boldsymbol{A}_i$ でベクトルを平行移動しても成分は変わらない，という当たり前の結果がでてくるわけね．具体的にベクトル成分のズレを求めていくと，

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

計量テンソルの成分は $g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ より[2]

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

また，クリストッフェル記号は (6.4.10) より

$$\Gamma^h{}_{\ell i} = \frac{1}{2} g^{jh} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\ell i}}{\partial u^j} \right) \tag{A.6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &{\Gamma^r}_{rr} = 0 \\ &{\Gamma^r}_{r\theta} = {\Gamma^r}_{\theta r} = 0 \\ &{\Gamma^\theta}_{rr} = 0 \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} &{\Gamma^r}_{\theta\theta} = -r \\ &{\Gamma^\theta}_{r\theta} = {\Gamma^\theta}_{\theta r} = 1/r \\ &{\Gamma^\theta}_{\theta\theta} = 0 \end{aligned} \right.$$

となるのでこれを (A.2) に入れ，今の場合 $A_\theta = 0$ なので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\parallel r} - \boldsymbol{A}_r &= (1/r) A_\theta d\theta = 0 \\ \boldsymbol{A}_{\parallel \theta} - \boldsymbol{A}_\theta &= -r A_r d\theta + (1/r) A_\theta dr = -r A_r d\theta \end{aligned} \tag{A.7}$$

- K氏：さて，上の議論を一般化して整理しておくと次のようになる．ベクトル $\boldsymbol{v}$ を無限小平行移動すれば，座標軸の曲がりの影響で移動後のベクトル成分は次式のように異なったものになる．

●共変成分：$v_i(u^k + du^k)_{\parallel} = v_i(u^k) + {\Gamma^j}_{ik} v_j du^k$ (A.8)

●反変成分：$v^i(u^k + du^k)_{\parallel} = v^i(u^k) - {\Gamma^i}_{jk} v^j du^k$ (A.9)

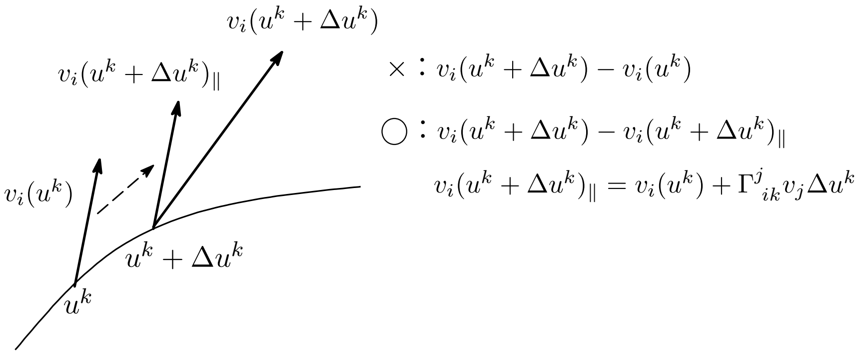
[2]対角行列の逆行列は対角成分の逆数が成分となる．

A.1.2　共変微分

- K氏：ベクトルの平行移動で言いたかったことは，曲線座標では座標軸が曲がっている影響を受けるためにわずかに平行移動すれば異なるベクトルになってしまうということだった．したがってベクトルの微分を考える場合，この影響を取り除かないとベクトルの純粋な微分量が求まらない．スカラーの場合は座標軸が曲がっていようがどうしていようが関係ないので通常の微分により共変ベクトルが得られた．しかし，ベクトルの場合，通常の微分では座標軸の曲がりの影響も取り込んでしまうので，ベクトル成分の変化を示すテンソルとはならないわけだね．この当たりの話を詳しく見ていこう．　曲線座標の場合，ベクトル成分 v_i の座標変数 u^k に関する偏微分係数を

$$\frac{\partial v_i}{\partial u^k} = \lim_{\Delta u^k \to 0} \frac{v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k)}{\Delta u^k} \tag{A.10}$$

と定義すると，$v_i(u^k + \Delta u^k)$ の中身は純粋にベクトルが変化した量に加えて“ 座標軸の曲がりによる影響分 ”も含んでいるため，純粋にベクトルを偏微分した値とはならない．座標軸の曲がりによる影響分を取り除いた偏微分が求めるものとなる．



これは (A.11) の右辺の分子の代わりに，この分子から曲線座標の影響分 $\Gamma^j{}_{ik} v_j \Delta u^k$ を除いた $v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k) - \Gamma^j{}_{ik} v_j \Delta u^k$ ものに置き換えればよい．このように微分することを共変微分すると呼んでいるんだね．だから通常の偏微分記号 ∂_μ を使わずに ∇_μ を使って共変微分してますよということを明確にしているわけなんだ．それは兎も角，共変微分すると

$$\begin{aligned} \nabla_k v_i &= \lim_{\Delta u^k \to 0} \frac{v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k + \Delta u^k)_\parallel}{\Delta u^k} \\ &= \lim_{\Delta u^k \to 0} \frac{v_i(u^k + \Delta u^k) - v_i(u^k) - \Gamma^j{}_{ik} v_j \Delta u^k}{\Delta u^k} \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial u^k} - \Gamma^j{}_{ik} v_j \end{aligned} \tag{A.11}$$

となって，(A.11) は (6.4.50) と一致する．共変微分係数は 2 階テンソルになることは既にいったとおりだ．

　上の議論は共変成分に関するものだが，反変成分についてもまったく同様になる．ただこの場合，曲線座標の影響は $-\Gamma^i{}_{jk} v^j \Delta u^k$ となることに注意すればよい．

$$\nabla_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} + \Gamma^i{}_{jk} v^j \tag{A.12}$$

なお，$\Gamma^i{}_{jk}$ のことを座標点 u^k における接続係数とか接続と呼んでいる．また，$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$ なので

$$\nabla_k \boldsymbol{v} = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} \boldsymbol{e}_i + v^i \left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial v^i}{\partial u^k} \boldsymbol{e}_i + v^i \Gamma^\mu{}_{ki} \boldsymbol{e}_\mu \tag{A.13}$$

となる．ここで (6.4.2) を使った．右辺第 2 項の添え字を $\mu \to i,\ i \to j$ に書き換えても同じなので

$$\nabla_k \boldsymbol{v} = \frac{\partial v^i}{\partial u^k}\boldsymbol{e}_i + v^j {\Gamma^i}_{kj}\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + v^j {\Gamma^i}_{kj}\right)\boldsymbol{e}_i \tag{A.14}$$

と表せる．(A.12) は反変成分の共変微分を表す式だが，この式はベクトルの共変微分を表す式だね．つまり，共変微分はベクトルの成分の偏微分と自然基底（←座標の関数）の微分から成っているということがよくわかると思う．

ところで計量テンソルと接続係数の関係だけど，計量テンソルは (A.5) で見たように場所と共に変化したね．言い換えると計量テンソルという量は空間の各点に存在し，それによって空間の曲がり具合が記述されるわけだ．そして接続係数は (A.6) で表されるように計量テンソルが場所と共に変化する度合いによって表されるということだね．

- エミリー：ところで用語のことだけど，$\nabla_k v_i$ とか $\nabla_k v^i$ を共変微分係数といい，共変微分係数をもとめることを共変微分すると表現されていたわね．そして共変微分は

$$\delta v_i = du^k \nabla_k v_i, \quad \delta v^i = du^k \nabla_k v^i \tag{A.15}$$

で表されるといわれていたけど，相対論のテキストなどを見ると共変微分係数のことを共変微分と呼んでいるようね．

- K氏：そうだね．本家数学のテキストでは (A.15) を共変微分と呼んでいる．一方，物理のテキストなどでは共変微分係数のことを共変微分と呼んでいるね．ここは数学のコーナーなので数学のテキストに準じているというわけだ．

A.2 測地線

A.2.1 レビ・チビタの平行性

- K氏：(A.15) を少し変形すると

$$\delta v^i = du^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial u^k} + {\Gamma^i}_{jk} v^j\right) = dv^i + {\Gamma^i}_{jk} du^k v^j \tag{B.1}$$

が得られる．δv^i はベクトル $\boldsymbol{v}$ の無限小移動 du^k 成分に伴う成分 v^i に伴う純粋な変化を表わしている．したがって，

$$\delta v^i = 0 \tag{B.2}$$

ならば，無限小移動に伴うベクトル成分の変化はない，つまりこれはデカルト座標における平行移動を意味している．これがレビ・チビタの平行性と呼ばれるものだ．

- エミリー：共変微分が 0 になるのは，無限小の平行移動したベクトルが移動先のベクトルと等しいということを意味するのね．これは，無限小移動が曲線的な移動でなく直線的な移動となるような道が必ずあり，そこでは接続係数 ${\Gamma^i}_{jk} = 0$ となっている．いわば曲がった空間の中の直線というイメージね．

- K氏：そうだね．ただ老婆心ながら一言いっておくと，このことは既にもう分かっていると思うけど，2 点を結ぶ曲線は無数あるけど平行移動できる曲線はその内の一本に限られるということだね．そのような道を測地線[3]と呼んでいる．さて，測地線の話に入る前に，§6.4.5 の最後のほう

[3]測地線の話は数学のコーナーの「曲面と曲線（続・余談」でもやっていますので興味のある方は参照ください．

で少し触れたけど，次の 2 つのことは平行移動の平行移動たる所以をなすものなので，ここで証明しておこう．

(A) 平行移動でベクトルの大きさは変わらない．

(B) 平行移動される 2 つのベクトルのなす角は一定に保たれる．

まず (A) の方だが，ベクトルの長さは

$$v^2 = g_{ij} v^i v^j \tag{B.3}$$

で与えられる．(B.2) より無限小平行移動では $d(v)^2 = \delta(v)^2$ なので

$$d(v)^2 = \delta(g_{ij} v^i v^j) = (\delta g_{ij}) v^i v^j + g_{ij} \delta(v^i) v^j + g_{ij} v^i \delta(v^j) \tag{B.4}$$

と展開できる．(6.4.55) より $\delta g_{ij} = du^k \nabla_k g_{ij} = 0$，また $\delta v^i = 0$ なので

$$d(v)^2 = 0 \tag{B.5}$$

となって，ベクトルの長さは変化しないことがわかる．

次に (B) の方だが，2 つのベクトル u^i, v^i の長さをそれぞれ u, v とすると，そのなす角は内積より

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} u^i v^j}{uv} \tag{B.6}$$

で与えられる．ベクトルの長さ u, v は平行移動によって値を変えないので

$$d(\cos\theta) = \delta \cos\theta = \delta \left(\frac{g_{ij} u^i v^j}{uv} \right) = \frac{1}{uv} \delta(g_{ij} u^i v^j) = 0 \tag{B.7}$$

したがって，平行移動により 2 つのベクトルのなす角は変化しない．

A.2.2 測地線

- K氏：測地線というのは次の微分方程式の解であるといって済ましておけば楽なんだけど，聞いている方はなにか喉にモノが詰まったような感じになって肝心のイメージがなかなか浮かばないと思う．もっともそれはボクだけかも知れないけど．いずれにしても測地線のいろいろな面（←詰まるところ同じことを言っているのだが）を眺めるのも意味があると思うので，主なものをピックアップしてみると

  (1) 曲面上の曲線でその上の任意の点における曲線の主法線の方向とその点における曲面の法線の方向とが一致するような性質を持つ曲線．

  (2) 曲線の接ベクトルが曲線に沿って移動しても平行に保たれるような曲線．

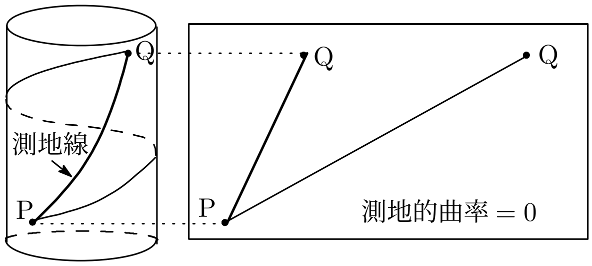
  (3) 測地線に沿って平行移動するベクトルと測地線の接線（接線ベクトル）とのなす角は一定である．

  (4) 曲面上の曲線の中で，その曲線上のどの点でもつねに測地的曲率がゼロであるような曲線．

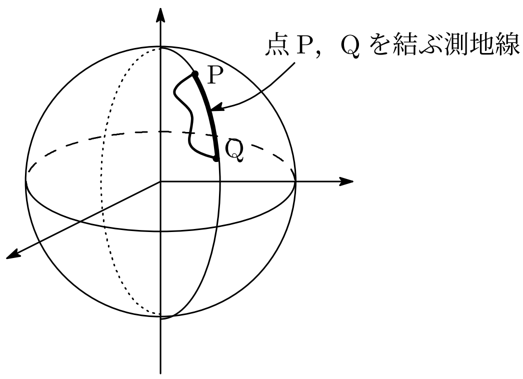
  (5) 曲面上の曲線で，平面上に展開すると直線になるものを測地線という．

  (6) 曲面上の 2 点を結ぶ無数の経路の中で，その長さが最短となる経路を測地線という．

いかがだろうか．いろいろな角度からスポットライトを当てると測地線の多様な側面が見えてくるね．ところで，(4) で「測地的曲率」という言葉がでてきたが，これは曲面上の曲線を平面上に展開してできる曲線の曲率のことだ．測地的曲率がゼロである曲線は平面上の直線ということで，それは (5) につながってくる．また，平面上の 2 点間の距離を最短にするのは直線だから，(5) は (6) につながる．参考までに柱面の測地線を平面に展開すると直線になるという図を書いておいた．



- エミリー：柱面の 2 点 P,Q を結ぶ線は無数に描けるけど，最短距離となるのは図の太線ね．球面の場合の測地線はどうなるのかしら．
- K氏：うん，球面の場合は球の中心を通る平面で切ったときの切り口に現れる円が測地線となる．球を切ったときの一番大きい円となるからこれを大円と呼んでいる．赤道は大円の一つだし，北極，南極の両極を通る大円を特に子午線といっている．球面上の 2 点を結ぶ測地線は大円上の円弧で，このうち大円の劣弧（半円より小さい弧）が最短となるのでこれが球面の測地線となるんだね．詳細は省くけど[4]，球面を平面に展開した場合，大円は直線になるんだ．



- エミリー：測地線の (4)〜(6) の側面は大体つかめたわ．(1)〜(3) を説明していただけるかしら．
- K氏：うん，(1) と (2) は同じことを言っているので (2) を説明しよう．これはレビ・チビタの平行性のことをいっているんだね．t を曲線のパラメータとして曲面上の曲線を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ で表し，$\boldsymbol{x}(t + \Delta t)$ での曲線の接ベクトルを $\boldsymbol{p}(t + \Delta t)$ としよう．接ベクトル $\boldsymbol{p}(t + \Delta t)$ をその点での曲面の接平面に正射影してできるベクトルは，$\boldsymbol{x}(t)$ での接ベクトル $\boldsymbol{p}(t)$ と Δt の無限小を除いて普通の意味での平行である，つまり接ベクトルは無限小を除いて変化しないということなんだ．測地線のイメージ的な話は以上として，次のステップに進もうか．

[4]詳細は栗田稔「近代数学新書 リーマン幾何」などを参照してください．

- エミリー：そうね．測地線の大体のイメージはつかめたような気がするしお話を進めていただける．

- K氏：OK．パラメータとして弧長 s をとり，曲線 $u^i = u^i(s)$ を考えよう．du^i/ds は大きさが 1 の単位接ベクトルになる[5]．これを v^i とすると

$$v^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{B.8}$$

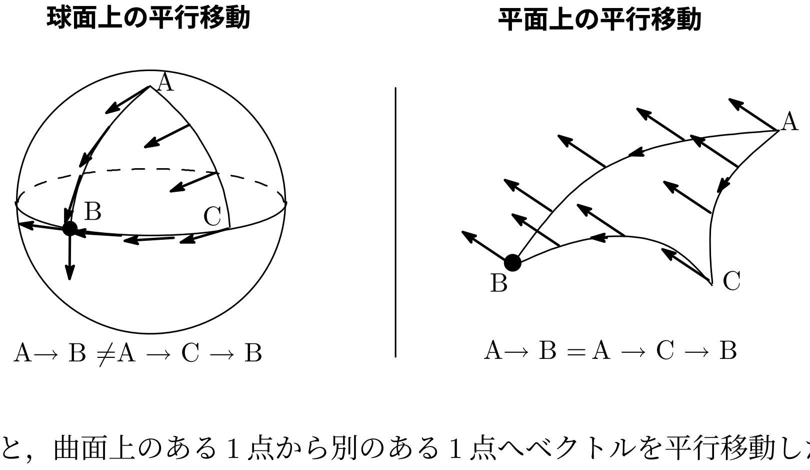
で与えられる．したがって，測地線の満足すべき微分方程式は (B.1) より

$$\begin{aligned} d\left(\frac{dx^i}{ds}\right) &= \frac{d^2x^i}{ds^2}ds = -\Gamma^i{}_{jk}dx^k\frac{dx^j}{ds} \\ \therefore\ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} &= 0 \quad or \quad \frac{dv^i}{ds} = -\Gamma^i{}_{jk}v^jv^k \end{aligned} \tag{B.9}$$

となる． 測地線は 2 点を結ぶ曲線のうちで弧の長さが最短の曲線ということで変分原理から求めることができるけど，ここでは省略する．大抵の相対論のテキストに載っているので興味があればそちらを参照して欲しい．具体的な曲面の測地線を求める計算例は「続・曲面と曲線」のレポートに載せているので参照ください．

A.3 曲率テンソルの物理的意味

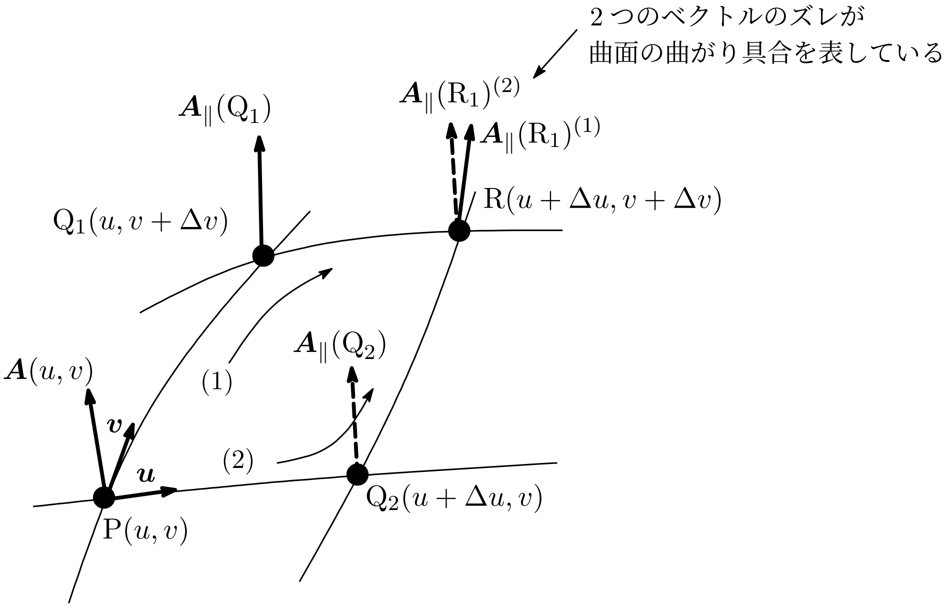
- K氏：曲面上の平行移動についてかなり詳しく説明した．くどいようだけど平坦な平面での平行移動ではないので離れた距離でのベクトルの平行性を保つことはできないね．曲面上の平行移動は無限小離れた 2 点間でベクトルを平行に保ちつつその長さを変えないように移動するということだ．たとえば球面上のベクトルを考えてみよう．A 点を北極とし，B，C は赤道上の点とする．A 点のベクトルを子午線に沿って直前のベクトルにできる限り平行に保ちつつ B 点まで平行移動したベクトルと，A 点から C 点を経由して B 点に到達したベクトルは異なるね．しかし同じことを平面上の 3 点で行うと，ベクトルの平行移動の経路にかかわらず同じベクトルになる． このことは球面の曲率が影響しているからだ．



一般的に言うと，曲面上のある 1 点から別のある 1 点へベクトルを平行移動したとき，その経路により異なるベクトルになるということで，この違いを比較することで曲面の曲がり具合の指標を引き出すことができる．これが曲率テンソルの物理的な内容だ．

[5]詳しいことは数学のコーナーの「曲線と曲面」のレポートを参照されたし．

- エミリー：なるほど，曲面を外部から眺めて曲がり具合を調べるという発想ではなく，曲面上に張り付いていても曲面の曲がり具合がわかる！ それは曲面上の異なる経路を辿ったベクトルの比較結果が曲面の曲がり具合の情報を含んでいるということね.
- K氏：そうなんだ．そこで以下，2つの異なる経路 (1)：P→ Q_1 →R と経路 (2)：P→ Q_2 →R の 2つの経路に沿ってベクトル $\boldsymbol{A}$ を平行移動し，到達点 R でのそれぞれの経路を辿ってきたベクトルの差を計算し，これが曲率テンソルを示すことを見ていこう．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は接ベクトルとする.



まず経路 (1) で，$\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ を Q_1 まで平行移動させると (A.9) より

$$A_\parallel^{\mu(1)}(\mathrm{Q}_1) = A^\mu(\mathrm{P}) - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}(\mathrm{P})A^\lambda(\mathrm{P})\varDelta v^\beta \tag{B.1}$$

次に，このベクトルを Q_1 から R へ平行移動すると

$$\begin{aligned}
A_\parallel^{\mu(1)}(\mathrm{R}) &= A_\parallel^{\mu(1)}(\mathrm{Q}_1) - \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(\mathrm{Q}_1)A_\parallel^{\lambda(1)}(\mathrm{Q}_1)\varDelta u^\gamma \\
&= A^\mu(\mathrm{P}) - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}(\mathrm{P})A^\lambda(\mathrm{P})\varDelta v^\beta - \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(\mathrm{Q}_1)A_\parallel^{\lambda(1)}(\mathrm{Q}_1)\varDelta u^\gamma \\
&= A^\mu(\mathrm{P}) - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}(\mathrm{P})A^\lambda(\mathrm{P})\varDelta v^\beta - \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(\mathrm{Q}_1)\left(A^\lambda(\mathrm{P}) - \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta}(\mathrm{P})A^\delta(\mathrm{P})\varDelta v^\beta\right)\varDelta u^\gamma
\end{aligned} \tag{B.2}$$

となる．ただし，

$$\varDelta v^\beta \equiv \frac{\partial x^\beta}{\partial v}\varDelta v, \quad \varDelta u^\gamma \equiv \frac{\partial x^\gamma}{\partial u}\varDelta u \tag{B.3}$$

ここで右辺第 3 項目の $\Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(\mathrm{Q}_1)$ を展開して 1 次の項までとると

$$\begin{aligned}
\Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(\mathrm{Q}_1) &= \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(u, v+\varDelta v) \\
&\simeq \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(u,v) + \varDelta v\frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(u,v)}{\partial v} = \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(u,v) + \varDelta v^\beta\frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(u,v)}{\partial x^\beta} \\
&= \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(\mathrm{P}) + \varDelta v^\beta\frac{\partial\Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}(\mathrm{P})}{\partial x^\beta}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

これを (B.2) に入れて整理すると，座標位置を示す (P) は省略して

$$
\begin{aligned}
A_{\parallel}^{\mu(1)}(\mathrm{R}) &\simeq A^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}A^{\lambda}\Delta v^{\beta} - \left(\Gamma^{\mu}_{\ \lambda\gamma} + \Delta v^{\beta}\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}\right)\left(A^{\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\ \delta\beta}A^{\delta}\Delta v^{\beta}\right)\Delta u^{\gamma} \\
&= A^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}A^{\lambda}(\Delta u^{\beta} + \Delta v^{\beta}) - \left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\beta}\right)A^{\alpha}\Delta v^{\beta}\Delta u^{\gamma}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

となる．

次に経路 (2) をとると $A_{\parallel}^{\mu(2)}(\mathrm{R})$ は (B.5) で $u \longleftrightarrow v$ の置き換えをすればよいので

$$
\begin{aligned}
A_{\parallel}^{\mu(2)}(\mathrm{R}) &\simeq A^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}A^{\lambda}(\Delta v^{\beta} + \Delta u^{\beta}) - \left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\beta}\right)A^{\alpha}\Delta u^{\beta}\Delta v^{\gamma} \\
&= A^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}A^{\lambda}(\Delta u^{\beta} + \Delta v^{\beta}) - \left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\gamma}\right)A^{\alpha}\Delta u^{\gamma}\Delta v^{\beta}
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

ここで右辺第 3 項の添え字 β と γ はいずれも和をとるダミーの添え字なのでそれらの名前を入れ替えた．(B.5) と (B.6) の差をとると

$$
\begin{aligned}
A_{\parallel}^{\mu(1)}(\mathrm{R}) - A_{\parallel}^{\mu(2)}(\mathrm{R}) &= \left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\gamma}\right)A^{\alpha}\Delta u^{\gamma}\Delta v^{\beta} \\
&= R^{\mu}_{\ \alpha\gamma\beta}A^{\alpha}\Delta u^{\gamma}\Delta v^{\beta}
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

これから曲率テンソルを

$$
\begin{aligned}
R^{\mu}_{\ \alpha\beta\gamma} &= \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\beta} \\
&= \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\ \alpha\gamma} - \partial_{\gamma}\Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\ \lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\ \alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

と定義する[6]．これは (6.6.6) に一致する．任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して (B.7) が常に 0 であれば $R^{\mu}_{\ \alpha\beta\gamma} = 0$ となる．この場合は平坦な曲面ということだね．曲率テンソルの成分数は 3 次元の場合は $3^4 = 81$ 個，4 次元では $4^4 = 256$ 個，一般に n 次元空間では n^4 個となる．ただし，すべてが独立成分ではない．対称性により独立成分数はもっと少なくなる．

計量テンソルの共変成分を使って曲率テンソルの添え字をすべて下付きにした量 $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ を次式で定義しよう．

$$
R_{\mu\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\mu\nu}R^{\nu}_{\ \alpha\beta\gamma}
\tag{B.9}
$$

これを共変曲率テンソルと呼んでいる．さて，曲率テンソルは次のような対称性を持っている．

(1) 後の添え字 2 つ (β, γ) に対して反対称

$$
R^{\mu}_{\ \alpha\beta\gamma} = -R^{\mu}_{\ \alpha\gamma\beta}, \qquad R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\mu\alpha\gamma\beta}
\tag{B.10}
$$

(2) 3 つの添え字を循環的に置換したものの和が 0

$$
R^{\mu}_{\ \alpha\beta\gamma} + R^{\mu}_{\ \beta\gamma\alpha} + R^{\mu}_{\ \gamma\alpha\beta} = 0, \qquad R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0
\tag{B.11}
$$

(3) 共変曲率テンソルは前の 2 つの添え字 (μ, α) に対して反対称

$$
R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma}
\tag{B.12}
$$

[6] 符号が反対になっているテキストもある．

(4) 共変曲率テンソルは (1) と (3) から前後 2 対の添え字 $(\mu\alpha, \beta\gamma)$ に対して対称

$$
\begin{aligned}
&R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\alpha} \\
\because\quad &R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\beta\gamma\delta\alpha} + R_{\beta\delta\alpha\gamma} = -R_{\gamma\beta\delta\alpha} - R_{\delta\beta\alpha\gamma} \\
&\quad = R_{\gamma\delta\alpha\beta} + R_{\gamma\alpha\beta\delta} + R_{\delta\alpha\gamma\beta} + R_{\delta\gamma\beta\alpha} \\
&\quad = 2R_{\gamma\delta\alpha\beta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} \\
&\quad = 2R_{\gamma\delta\alpha\beta} - R_{\alpha\beta\gamma\delta}
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

この対称性を利用して n 次元での独立成分の数を求めてみよう．$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ について $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)$ の対の添え字で同じものがあればその成分はゼロになるので独立成分の数は ${}_nC_2 \times_n C_2 = ({}_nC_2)^2$ 個を超えない．(B.11) で (α,β,γ) のどれかが同じ場合，(B.10) か (B.12) のいずれかになるので (B.11) の独立な式の数は $n \times_n C_3$ 個となる．したがって求める独立成分の数は上の個数から条件式の数を引いて

$$
({}_nC_2)^2 - n \times_n C_3 = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{B.14}
$$

となる．3 次元の場合 $n=3$ とおいて 6 個，4 次元の場合は 20 個となる．

- この独立成分の数は曲率テンソルのもつ対称性からでてくる数で，たとえば曲面に対称性がある場合にはもっと数が減ることになるわね.
- そうだね．ところで上で見た曲率テンソルの関係式に加えてビアンキの恒等式と呼ばれる重要な関係式を紹介してこのセクションを終わろう．これは曲率テンソルの微分に関するものだ.

■ビアンキの恒等式

$$
\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} + \nabla_\alpha R^\mu_{\nu\beta\gamma} + \nabla_\beta R^\mu_{\nu\gamma\alpha} = 0 \tag{B.15}
$$

== ページ数も丁度 100 ページと切りのいい数字になったので，テンソル談義もここらでお開きにします．==

（以上）